חוברת סיכום קורס

שיטות כמותיות

תוכן עניינים

וקטורים

הגדרה

וקטור הוא n'יה סדורה של מספרים ממשיים הכתובים בעמודה או בשורה.

נסמן וקטור בצורה $\underline{x}$.

פעולות חשבון – הגדרה

פעולת החיבור בין שני וקטורים מוגדרת באופן הבא:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

פעולת כפל בסקלר (מספר ממשי) מוגדרת באופן הבא:

$$\alpha \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$$

תכונות

יהיו $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}$ וקטורים מגודל n ויהיו α, β מספרים ממשיים.

1) $\underline{x} + \underline{y} = \underline{y} + \underline{x}$
2) $\left(\underline{x} + \underline{y}\right) + \underline{z} = \underline{x} + \left(\underline{y} + \underline{z}\right)$
3) $\alpha \cdot \left(\underline{x} + \underline{y}\right) = \alpha \cdot \underline{x} + \alpha \cdot \underline{y}$
4) $(\alpha + \beta) \cdot \underline{x} = \alpha \cdot \underline{x} + \beta \cdot \underline{x}$
5) $\alpha \cdot \left(\beta \cdot \underline{x}\right) = \alpha\beta \cdot \underline{x}$

נורמה (אורך של וקטור)

הגדרה

יהי $(x_1, x_2, \dots, x_n) = \underline{x}$ וקטור בגודל n. הנורמה של $\underline{x}$ מוגדרת להיות

$$\|\underline{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$$

וזהו האורך של הוקטור $\underline{x}$.

הגדרה

יהיו $\underline{x}, \underline{y}$ שני וקטורים מגודל n. המרחק בין $\underline{x}, \underline{y}$ יסומן ב- $d\left(\underline{x}, \underline{y}\right)$ ומוגדר להיות

$$d\left(\underline{x}, \underline{y}\right) = \|\underline{x} - \underline{y}\|$$

תכונות

יהיו $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}$ וקטורים מגודל n ויהי α מספר ממשי.

1) $\|\underline{x}\| \geq 0$
2) $\|\underline{x}\| = 0 \Leftrightarrow \underline{x} = 0$
3) $\|\alpha \cdot \underline{x}\| = |\alpha| \cdot \|\underline{x}\|$
4) $\|\underline{x} + \underline{y}\| \leq \|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|$ (תכונה זו נקראת אי שוויון המשולש)
5) $d\left(\underline{x}, \underline{y}\right) = 0 \Leftrightarrow \underline{x} = \underline{y}$
6) $d\left(\underline{x}, \underline{y}\right) = d\left(\underline{y}, \underline{x}\right)$
7) $d\left(x, \underline{0}\right) = \|\underline{x}\|$

מכפלה סקלרית

הגדרה

יהיו $\underline{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n),\underline{y}=(y_1,y_2,\dots,y_n)$ וקטורים מגודל n. המכפלה הסקלרית בין $\underline{x},\underline{y}$ מוגדרת להיות

$$\underline{x}\cdot\underline{y}=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n=\sum_{k=1}^{n}x_ky_k$$

תכונות

יהיו $\underline{x},\underline{y},\underline{z}$ וקטורים מגודל n ויהי α מספר ממשי.

1) $\underline{x}\cdot\underline{y}=\underline{y}\cdot\underline{x}$

2) $\underline{x}\cdot\left(\underline{y}+\underline{z}\right)=\underline{x}\cdot\underline{y}+\underline{x}\cdot\underline{z}$

3) $\underline{x}\cdot\left(\alpha\underline{y}\right)=\left(\alpha\underline{x}\right)\cdot\underline{y}=\alpha\cdot\left(\underline{x}\cdot\underline{y}\right)$

4) $\left|\underline{x}\cdot\underline{y}\right|\le\|\underline{x}\|\cdot\left\|\underline{y}\right\|$

זוית בין וקטורים

יהיו $\underline{x},\underline{y}$ שני וקטורים מגודל n. הזוית בין הוקטורים שנסמנה ב- θ מקיימת

$$\cos(\theta)=\frac{\underline{x}\cdot\underline{y}}{\|\underline{x}\|\cdot\left\|\underline{y}\right\|}$$

אורתוגונליות

הגדרה

יהיו $\underline{x},\underline{y}$ שני וקטורים מגודל n כך ש- $\underline{x} \neq \underline{y}$. $\underline{x},\underline{y}$ יקראו אורתוגונלים (מאונכים) אם $\underline{x} \cdot \underline{y} = 0$.

הערה

נשים לב שאם המכפלה הוקטורית בין שני וקטורים היא 0 אז מהנוסחה של הזוית בין הוקטורים נקבל ש-

$$\cos(\theta) = 0$$

והמשמעות היא שהזוית היא 90 או 270, שזאת בדיוק זווית מאונכת.

מטריצות

הגדרה

מערך מלבני של מספרים המסודרים ב- m שורות ו- n עמודות נקרא מטריצה

$$A_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

$a_{i,j}$ הוא האיבר הנמצא בשורה i ובעמודה j.

<u>מטריצה ריבועית – הגדרה</u>

מטריצה מגודל $n\times n$ תקרא מטריצה ריבועית.

<u>שוויון מטריצות</u>

מטריצות A,B שוות אם הן מאותו גודל ומתקיים

$$a_{i,j}=b_{i,j}$$

לכל i,j.

<u>אלכסון מטריצה – הגדרה</u>

תהי A מטריצה ריבועית.

האיברים במקומות ה- (i,i) נקראים האלכסון של המטריצה A.

פעולות חשבון

כפל בסקלר

תהי $A_{m\times n}$ מטריצה מגודל $m\times n$ ויהי $\alpha\in\mathbb{R}$ סקלר ממשי.

המטריצה $\alpha\cdot A_{m\times n}$ מוגדרת להיות

$$\alpha\cdot A_{m\times n}=\begin{pmatrix}\alpha a_{1,1} & \alpha a_{1,2} & \dots & \alpha a_{1,n}\\ \alpha a_{2,1} & \alpha a_{2,2} & \dots & \alpha a_{2,n}\\ . & . & . & .\\ \alpha a_{m,1} & \alpha a_{m,2} & \dots & \alpha a_{m,n}\end{pmatrix}$$

חיבור מטריצות

תהיינה $A_{m\times n},B_{m\times n}$ שתי מטריצות מאותו גודל. מטריצת הסכום מוגדרת להיות

$$A_{m\times n}+B_{m\times n}=\begin{pmatrix}a_{1,1}+b_{1,1} & a_{1,2}+b_{1,2} & \dots & a_{1,n}+b_{1,n}\\ a_{2,1}+b_{2,1} & a_{2,2}+b_{2,2} & \dots & a_{2,n}+b_{2,n}\\ . & . & . & .\\ a_{m,1}+b_{m,1} & a_{m,2}+b_{m,2} & \dots & a_{m,n}+b_{m,n}\end{pmatrix}$$

כפל מטריצות

תהיינה $A_{m\times n},B_{n\times k}$ אז נסמן ב- $C_{m\times k}=A_{m\times n}\cdot B_{n\times k}$ ואיברה במקום ה- (i,j) הוא

$$c_{i,j}=\sum_{t=1}^{n}a_{i,t}b_{t,j}$$

תכונות

תהיינה A,B,C מטריצות מגדלים מתאימים.

1) $A+B=B+A$
2) $(A+B)+C=A+(B+C)$
3) $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$
4) $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$

<u>הערה</u>

שימו לב שבאופן כללי הכפל לא מתחלף שכן הוא לא בהכרח מוגדר. אפילו כשהוא מוגדר הוא לא בהכרח מתחלף בכפל.

לדוגמה

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

מתקיים

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ו-

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

אז כמובן שהן לא שוות.

קיימות מטריצות שכן מתחלפות בכפל עם כל מטריצה אחרת (כשהכפל מוגדר).

מטריצות מיוחדות

מטריצת האפס

מטריצת האפס היא מטריצה המכילה רק אפסים. נסמן אותה ב- $0_{m\times n}$.

דוגמאות

1) $A=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

2) $B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

תכונות

1) תהי A מגודל $m\times n$ אז $A+0_{m\times n}=A$.

2) תהי A מגודל $m\times n$ אז $0_{k\times m}\cdot A=0_{k\times n}$ ו- $A\cdot 0_{n\times k}=0_{m\times k}$.

מטריצת היחידה

מטריצת היחידה היא מטריצה ריבועית המכילה על האלכסון שלה 1 ובשאר המקומות 0. נסמן ב- I_n את מטריצת היחידה מגודל $n\times n$.

דוגמאות

1) $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

2) $I_4=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

תכונה

תהי מטריצה A מגודל $m\times n$ אז $I_m\cdot A=A\cdot I_n=A$.

מטריצה אלכסונית

מטריצה אלכסונית היא מטריצה ריבועית שמחוץ לאלכסון שלה יש רק אפסים.

דוגמאות

1) מטריצת האפס הריבועית היא מטריצה אלכסונית.
2) לכל $n \in \mathbb{N}$ I_n היא אלכסונית.
3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ היא אלכסונית.

תכונות

תהיינה A, B מטריצות אלכסוניות מגודל $n \times n$.

1) $A + B$ אלכסונית.
2) $A \cdot B$ אלכסונית.

מטריצה מוחלפת

תהי מטריצה A מגודל $m \times n$. המטריצה המוחלפת של A שנסמנה ב- A^t היא מטריצה מגודל $n \times m$ שהשורה ה- i שלה היא העמודה ה- i של A.

דוגמאות

1) ניקח את $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ אז $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$
2) ניקח את $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ אז $A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. יצא ש- $A^t = A$.
3) ניקח את $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ אז $A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. יצא ש- $A^t = -A$.

<u>תכונות</u>

תהיינה A,B מטריצות מגודל מתאים.

1) $(A^t)^t = A$

2) $(A+B)^t = A^t + B^t$

3) $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

<u>מטריצה משולשת עליונה</u>

מטריצה משולשת עליונה היא מטריצה ריבועית שכל האיברים שמתחת לאלכסון הם אפסים.

<u>דוגמאות</u>

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ היא משולשת עליונה.

2) מטריצת האפס $0_{n\times n}$ היא משולשת עליונה.

3) מטריצת היחידה I_n היא משולשת עליונה.

4) כל מטריצה אלכסונית היא משולשת עליונה.

<u>תכונות</u>

תהיינה A,B מטריצות משולשות עליונות מגודל מתאים.

1) $A+B$ היא משולשת עליונה.

2) $A \cdot B$ היא משולשת עליונה.

<u>מטריצה משולשת תחתונה</u>

בצורה אנלוגית למטריצה משולשת עליונה.

גם התכונות נשמרות עבור משולשת תחתונה.

מטריצה סימטרית

מטריצה סימטרית היא מטריצה ריבועית המקיימת $A^t = A$.

דוגמאות

1) מטריצת היחידה I_n היא סימטרית.
2) מטריצת האפסים $0_{n\times n}$ היא סימטרית
3) המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ היא סימטרית.

תכונות

1) אם A, B סימטריות מגודל מתאים אז $A + B$ סימטרית.
2) לכל מטריצה A מתקיים $A + A^t$ סימטרית וגם $A \cdot A^t$ סימטרית.

מטריצה אנטי סימטרית

מטריצה אנטי סימטרית היא מטריצה ריבועית המקיימת $A^t = -A$

הערה

שימו לב שמהתנאי הזה בהכרח צריך שיהיה 0 על האלכסון.

דוגמאות

1) מטריצת האפס $0_{n\times n}$ היא אנטי סימטרית.
2) המטריצה $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ היא אנטי סימטרית.

מטריצה הפיכה

מטריצה ריבועית A מגודל $n \times n$ תקרא הפיכה אם קיימת מטריצה B מגודל $n \times n$ כך ש

$$AB = BA = I_n$$

נסמן את המטריצה B ב- A^{-1}.

דוגמאות

1) מטריצת היחידה I_n היא הפיכה.

2) מטריצת האפס $0_{n\times n}$ אינה הפיכה.

3) המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ הפיכה.

מערכת משוואות לינאריות

דירוג מטריצות

פעולות אלמנטריות

תהא A מטריצה מגודל $m \times n$.

ישנן 3 פעולות אלמנטריות על שורות.

1) החלפת שורה i בשורה j במטריצה A.
2) הכפלת שורה i של מטריצה A בסקלר כלשהו.
3) הוספה לשורה i את שורה j של מטריצה A מוכפלת בסקלר כלשהו.

מטריצות אלמנטריות

מטריצה אלמנטרית היא מטריצת יחידה שביצעו עליה את אחת מהפעולות האלמנטריות.

הערות

1) שימו לב שלעשות פעולה אלמנטרית על מטריצה שקול להכפלה משמאל במטריצה אלמנטרית מתאימה.

2) ניתן באופן אנלוגי להגדיר פעולות אלמנטריות זהות על העמודות ואז השקילות תהיה להכפיל מימין במטריצה אלמנטרית מתאימה.

מטריצות שקולות שורה – הגדרה

מטריצות A, B מאותו גודל יקראו שקולות שורה או אקווילנטיות אם ניתן להגיע ממטריצה A למטריצה B בעזרת מכפלות משמאל של מטריצות אלמנטריות.

הערה

הכוונה בהגדרה שניתן להגיע מ- A ל- B בעזרת פעולות אלמנטריות.

מטריצה מדורגת – הגדרה

מטריצה מדורגת היא מטריצה מגודל $m \times n$ כך שמתחת לאלכסון (i, i) יש רק אפסים.

משפט

כל מטריצה שקולת שורות למטריצה מדורגת.

משפט

תהיינה A,B מטריצות מגודל $m \times n$ ו- $\underline{v} \in E^n$ ו- $\underline{b} \in E^m$ וקטורים.

אם A,B שקולות שורה וגם $A\underline{v} = \underline{b}$ אז $B\underline{v} = C\underline{b}$ כאשר C היא המטריצה המתקבלת מהכפלת מטריצות אלמנטריות מתאימות בסדר המתאים משמאל המקיים $CA = B$.

הערה

עבור מטריצה מדורגת קל לנו לפתור את מערכת המשוואות. ולכן מצאנו שיטה לפתור את המערכת.

שיטה

בהנתן מערכת משוואות ליניאריות $A\underline{x} = \underline{b}$ נפתור אותה בצורה הבאה:

(1 נכתוב את המערכת בצורה הבאה $(A \quad | \quad b)$. מטריצה זו תקרא מטריצת המערכת.
(2 נבצע פעולות אלמנטריות על מטריצת המערכת עד שנגיע לצורה מדורגת. שלב זה יקרא דירוג המטריצה.
(3 נפתור את המערכת בצורה המדורגת.

חקירת מערכת משוואות ליניאריות

<u>דרגה של מטריצה – הגדרה</u>

תהא מטריצה A מגודל $m \times n$. הדרגה של המטריצה שתסומן ב- $r(A)$ מוגדרת להיות מספר העמודות הבלתי תלויות המקסימלי.

<u>הערה</u>

מתקיים לכל מטריצה כי $r(A) = r(A^t)$ ולכן אפשר להגדיר את הדרגה גם לפי השורות.

<u>משפטים:</u>

תהא A מטריצה מגודל $m \times n$ ו- B מטריצה מגודל $n \times k$.

1) $r(A) \leq \min\{m, n\}$

2) $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$

<u>מערכת משוואות הומוגנית – הגדרה</u>

מערכת משוואות ליניארית מהצורה $A\underline{x} = \underline{0}$ תיקרא מערכת משוואות ליניארית הומוגנית.

<u>הערה</u>

נשים לב כי תמיד יש פתרון למערכת המשוואות ההומוגנית והוא וקטור ה- 0.

כלומר עבור מערכת משוואות כזאת או שיש פתרון יחיד או שיש אינסוף פתרונות.

<u>משפט</u>

תהי מטריצה A מגודל $m \times n$.

למערכת המשוואות ההומוגנית $A\underline{x} = \underline{0}$ יש פתרון יחיד אם"ם $r(A) = n$.

<u>הערה</u>

שימו לב שכאשר הפתרון יחיד אז הפתרון הוא וקטור האפס.

<u>מסקנה</u>

תהא מטריצה A מגודל $m \times n$.

אם $m < n$ (כלומר יש יותר נעלמים ממשוואות) אז יש אינסוף פתרונות למערכת המשוואות ההומוגנית $A\underline{x} = \underline{0}$.

<u>הערה</u>

נשים לב שעבור מטריצה A מגודל $m \times n$ קבוצת הפתרונות של המערכת $A\underline{x} = \underline{0}$ היא תת מרחב של E^n.

<u>מרחב הפתרונות של מערכת משוואות – הגדרה</u>

תהא A מטריצה מגודל $m \times n$.

תת המרחב

$$\{\underline{x} \in E^n | A\underline{x} = \underline{0}\}$$

יקרא מרחב הפתרונות של המערכת $A\underline{x} = \underline{0}$.

<u>משפט</u>

תהא מטריצה A מגודל $m \times n$.

מימד מרחב הפתרונות של המערכת $A\underline{x} = \underline{0}$ שווה ל- $n - r(A)$.

<u>הערה</u>

מספר המשתנים החופשיים במערכת $A\underline{x} = \underline{0}$ שווה ל- $n - r(A)$.

<u>מערכת משוואות לא הומוגנית – הגדרה</u>

מערכת משוואות ליניאריות $A\underline{x} = \underline{b}$ נקראת לא הומוגנית אם $\underline{b} \neq \underline{0}$.

הערה

נשים לב שבמקרה של המערכת הלא הומוגנית לא תמיד יש לנו פתרון.

ניקח את $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ ואת $\underline{b}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$

למערכת $A\underline{x}=\underline{b}$ אין פתרון.

נכתוב את מטריצת המערכת ואז

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

נשים לב שהשורה השנייה היא סתירה שכן זה אומר ש- $0=1$.

אז אין פתרון. נשים לב שדרגת מטריצת המערכת שונה מדרגת המטריצה A.

אז במצב הלא הומוגני יש 3 מצבים אפשריים, פתרון יחיד, אינסוף פתרונות או אין פתרון.

משפט

תהא מטריצה A מגודל $m\times n$, יהא $\underline{b}$ וקטור מגודל $m\times 1$ ויהא $\underline{x}\in E^n$ פתרון למערכת $A\underline{x}=\underline{b}$.

אז

$$\{\underline{a}\in E^n|A\underline{a}=\underline{b}\}=\{\underline{x}+\underline{v}|A\underline{v}=\underline{0}\}$$

הערה

קיבלנו בעצם קשר בין הפתרונות למערכת הלא הומוגנית לבין המערכת ההומוגנית.

מסקנה

תהא A מטריצה מגודל $m\times n$ ויהא $\underline{b}\in E^m$. נסמן ב- $(A|\underline{b})$ את מטריצת המערכת.

1) למערכת $A\underline{x}=\underline{b}$ אין פתרון אם $r(A)\neq r(A|\underline{b})$.
2) למערכת $A\underline{x}=\underline{b}$ יש פתרון יחיד אם $r(A)=r(A|\underline{b})=n$.
3) למערכת $A\underline{x}=\underline{b}$ יש אינסוף פתרונות אם $r(A)=r(A|\underline{b})<n$.

מרחבים אוקלידיים

הגדרה

אוסף כל הוקטורים מגודל n יקרא מרחב אוקלידי n מימדי ונסמנם ב- E^n.

וקטור יחידה – הגדרה

הוקטורים מהצורה

$$e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

כאשר יש 1 במקום ה- i ו- 0 בשאר המקומות בוקטור יקראו וקטורי היחידה.

תת-מרחב – הגדרה

יהי מרחב אוקלידי n מימדי E^n וקבוצה $W \subset E^n$.

W הוא תת מרחב של E^n אם הוא מקיים:

1) $\underline{0} \in W$ (וקטור האפס שייך ל- W)

2) לכל $\underline{x}, \underline{y} \in W$ מתקיים $\underline{x} + \underline{y} \in W$

3) לכל $\underline{x} \in W$ ולכל $\alpha \in \mathbb{R}$ ממשי מתקיים $\alpha \cdot \underline{x} \in W$

משפט

יהיו $W, U \subset E^n$ תתי מרחבים אז גם $W \cap U$ תת מרחב.

תלות לינארית

הגדרה

יהי מרחב אוקלידי מגודל n מימדי E^n.

(1 קבוצת וקטורים $\{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_k\} \in E^n$ תקרא תלויה ליניארית אם קיימים סקלרים $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ ממשיים כך שלפחות אחד מהם שונה מ- 0 המקיימים

$$\alpha_1\underline{x}_1 + \alpha_2\underline{x}_2 + \cdots + \alpha_k\underline{x}_k = 0$$

נאמר בקיצור שהקבוצה $\{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_k\}$ היא ת"ל.

(2 קבוצת וקטורים $\{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_k\} \in E^n$ היא בלתי תלויה לינארית אם מתקיים

$$\alpha_1\underline{x}_1 + \alpha_2\underline{x}_2 + \cdots + \alpha_k\underline{x}_k = 0$$

אז $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$.

במקרה זה נאמר שהקבוצה $\{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_k\}$ היא בת"ל או ב"ת.

משפטים

(1 קבוצה המכילה וקטור אחד ששונה מ- 0 היא ב"ת.
(2 קבוצת וקטורים המכילה את וקטור ה- 0 היא תלויה לינארית.
(3 אם קבוצת וקטורים היא ב"ת אז כל תת קבוצה שלה היא גם ב"ת.
(4 אם קבוצת וקטורים היא תלויה לינארית אז כל קבוצה שמכילה אותה גם תלויה ליניארית.

קומבינציה לינארית – הגדרה

תהא $\{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_m\} \subset E^n$ קבוצה. וקטור $\underline{y}$ יקרא קומבינציה ליניארית של וקטורי הקבוצה אם קיימים $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ כך ש-

$$\underline{y} = \alpha_1\underline{x}_1 + \alpha_2\underline{x}_2 + \cdots + \alpha_m\underline{x}_m$$

מרחב נפרש – הגדרה

תהא $\{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_m\} \subset E^n$ קבוצה. המרחב הנפרש על ידי וקטורי הקבוצה הוא המרחב

$$span(\{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_m\}) = \{\alpha_1\underline{x}_1 + \alpha_2\underline{x}_2 + \cdots + \alpha_m\underline{x}_m | \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}\}$$

הערה

שימו לב שהמרחב הנפרש הוא כל הצירופים הליניאריים של וקטורי הקבוצה.

טענה

לכל קבוצה $\{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_m\} \subset E^n$ המרחב הנפרש

$$span(\{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_m\})$$

הוא תת מרחב של E^n.

קבוצה יוצרת – הגדרה

יהי $W \subset E^n$ תת מרחב ותהא $A = \{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_m\} \subset W$.

A תקרא קבוצה יוצרת ל- W אם מתקיים $span(A) = W$.

הערות

1) W יכול להיות גם E^n.

2) אם A קבוצה יוצרת ל- W אז כל וקטור ב- W הוא צירוף ליניארי של וקטורי הקבוצה A.

בסיס – הגדרה

יהי $W \subset E^n$ תת מרחב. קבוצה $\{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_m\} \subset W$ תקרא בסיס ל- W אם הקבוצה היא בת"ל וגם קבוצה יוצרת ל- W.

משפט

יהי $W \subset E^n$ תת מרחב.

כל בסיס ל- W הוא מאותו הגודל.

מימד – הגדרה

יהי $W \subset E^n$ תת מרחב. המימד של W הוא הגודל של אחד הבסיסים של W.

הערה

מהמשפט נובע שההגדרה של מימד מוגדרת היטב.

משפטים

יהי $W \subset E^n$ תת מרחב שמימדו m.

1) כל קבוצה בת"ל מגודל m היא בסיס ל- W.

2) כל קבוצה מגודל $m+1$ של וקטורים מ- W היא קבוצה ת"ל.

3) בהנתן בסיס ל- W כל וקטור ב- W ניתן להצגה באופן יחיד כצירוף ליניארי של איברי הבסיס.

דטרמיננטות ומטריצות הפיכות

דטרמיננטה

תמורה – הגדרה

תמורה היא פונקציה חח"ע ועל מ- $\{1,2,\dots,n\}$ לעצמה.

סימן של תמורה – הגדרה

בהנתן תמורה הסימן של התמורה הוא 1 אם מספר החיתוכים בייצוג $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & \dots & n \\ a_1 & a_2 & \dots & \dots & a_n \end{pmatrix}$ כאשר מחברים כל מספר בשורה הראשונה לאותו מספר בשורה התחתונה הוא זוגי ו- -1 אם מספר החיתוכים הוא אי זוגי.

דטרמיננטה - הגדרה

תהא מטריצה ריבועית A מגודל $n \times n$.

הדטרמיננטה של A המסומנת ב- $|A|$ מוגדרת להיות

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) \cdot a_{1,\sigma(1)} a_{1,\sigma(2)} \dots a_{n,\sigma(n)}$$

פיתוח לפי שורה/עמודה

אנחנו לא רוצים לעבוד עם התמורות בשביל לחשב דטרמיננטה ולכן אנחנו נחשב אותה לפי פיתוח שורה או עמודה.

מינור – הגדרה

תהא מטריצה ריבועית A מגודל $n \times n$.

המינור ה- $A_{i,j}$ של A מוגדרת להיות הדרמיננטה של המטריצה המתקבלת ממחיקת השורה ה- i והעמודה ה- j מ- A.

דטרמיננטה של 2×2

תהי $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$ מטריצה ריבועית מסדר 2×2 אז

$$|A| = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$$

משפט

תהא A מטריצה ריבועית מגודל $n \times n$ ויהא $i \in \{1,2, \dots, n\}$ אז

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{i,j}$$

ו-

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{j,i}$$

הערות

(1 המשפט הזה הוא בעצם הפיתוח לפי עמוד או שורה של הדטרמיננטה. זו שיטה הרבה יותר פשוטה לחישוב ואנחנו נשתמש בה.

(2 ההגדרה היא אינדוקטיבית. הגודל של כל מינור קטן ובסוף נגיע ל- 2×2 שאותו אנחנו יודעים לפתור.

תכונות:

תהיינה A, B מטריצות ריבועיות מגודל $n \times n$.

(1 אם ב- A יש שורת אפסים או עמודת אפסים אז הדטרמיננטה שלה היא 0.

(2 אם B התקבלה מ- A על ידי החלפת שתי שורות אז $|B| = -|A|$.

(3 אם B התקבלה מ- A על ידי הכפלת שורה או עמודה כלשהי בסקלר α אז $|B| = \alpha|A|$.

(4 אם ב- A יש שני שורות זהות (או עמודות זהות) אז $|A| = 0$.

(5 אם A, B זהות מלבד שורה אחת (או עמודה אחת) אז $|A + B| = |A| + |B|$.

(6 אם B התקבלה מ- A על ידי הוספת שורה מוכפלת בסקלר לשורה אחרת (אנלוגי לעמודות) אז $|B| = |A|$.

(7 אם $r(A) < n$ אז $|A| = 0$.

(8 אם A מטריצה משולשית עליונה (או תחתונה) אז הדטרמיננטה של A שווה למכפלת איברי האלכסון.

(9 $|AB| = |A||B|$

<u>המטריצה הצמודה – הגדרה</u>

תהא A מטריצה ריבועית מסדר $n \times n$.

המטריצה הצמודה של A שנסמנה ב- A^* או ב- $adj(A)$ היא המטריצה שאיברה ה-(i,j) הוא

$$(a^*)_{i,j} = (-1)^{i+j} A_{j,i}$$

כאשר $A_{j,i}$ הוא המינור ה- (j,i) של A.

<u>משפט</u>

תהא A מטריצה ריבועית מסדר $n \times n$ אז

$$A^* \cdot A = A \cdot A^* = |A| I_n$$

מטריצות הפיכות

תזכורת

מטריצה ריבועית A מגודל $n \times n$ תקרא הפיכה אם קיימת מטריצה ריבועית B מגודל $n \times n$ כך ש-

$$AB = BA = I_n$$

נסמן את B בתור A^{-1}.

תכונות

תהיינה A, B מטריצות ריבועיות מגודל $n \times n$.

1) אם A, B הפיכות אז AB הפיכה ומתקיים $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
2) $(A^{-1})^{-1} = A$.
3) $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.
4) A הפיכה אם"ם $r(A) = n$.
5) A הפיכה אם"ם $|A| \neq 0$.
6) אם A הפיכה אז $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$.

הערה

נשים לב כי ראינו בחלק של המטריצה המצורפת שלכל מטריצה ריבועית A מתקיים

$$A \cdot A^* = |A| I_n$$

ולכן אם $|A| \neq 0$ אז המטריצה הפיכה שכן אז $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$.

אז אנחנו רואים שהדטרמיננטה אומרת לנו משהו האם מטריצה כלשהי היא הפיכה או לא.

עבור 2×2 יש לנו נוסחה להופכית של מטריצה שהיא

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} a_{2,2} & -a_{1,2} \\ -a_{2,1} & a_{1,1} \end{pmatrix}$$

דרך לחישוב ההופכית

נציג את השיטה בעזרת דוגמה.

נמצא את המטריצה ההופכית ל- $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix}1&1&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\1&0&1&0&0&1\end{pmatrix}$$

נבצע פעולות אלמנטריות עד שבצד שמאל נגיע למטריצת היחידה ומה שנקבל בצד ימין הוא המטריצה ההופכית.

דרך נוספת לחישוב ההופכית

אנחנו יכולים להסתכל על כפל של מטריצות בצורה הבאה.

יהיו A, B כך שהכפל $A \cdot B$ מוגדר.

נסמן ב- $\underline{b}_i$ את העמודה ה- i של B.

אז אנחנו נקבל שהעמודה ה- i של AB היא

$$A \cdot \underline{b}_i$$

ולכן כדי לחשב את ההופכית אנחנו יכולים לפתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$A \cdot \underline{x} = e_i$$

כאשר הפתרון יהיה העמודה ה- i של ההופכית.

הסתכלות נוספת היא שאם נסמן ב- $\underline{a}_j$ את השורה ה- j של A אז השורה ה- j של AB היא

$$(AB)_j = \underline{a}_j \cdot B$$

הערה:

נזכר בחלק של חקירת מערכות משוואות ליניאריות ונזכר ש- $r(A) = n$ אומר שיהיה פתרון יחיד למערכת המשוואות הזאת.

ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים

הגדרה

תהא A מטריצה ריבועית מגודל $n \times n$ ויהא $\lambda \in \mathbb{R}$.

λ יקרא ערך עצמי של המטריצה A אם קיים $0 \neq \underline{v} \in E^n$ כך ש- $A\underline{v} = \lambda \underline{v}$. $\underline{v}$ יקרא וקטור עצמי של הערך העצמי λ.

<u>הערה</u>

נשים לב שאם λ הוא ערך עצמי של המטריצה A ו- $\underline{v}$ הוא וקטור עצמי אז הוא פתרון למערכת המשוואות

$$(A - \lambda I_n)\underline{v} = \underline{0}$$

כלומר λ הוא ערך עצמי של המטריצה A אם קיים פתרון לא טריוויאלי למערכת

$$(A - \lambda I_n)\underline{x} = \underline{0}$$

ראינו כי קיים פתרון לא טריוויאלי למערכת הזאת אם"ם $r(A) < n$ אם"ם $|A - \lambda I_n| = 0$.

הפולינום האופייני – הגדרה

תהא A מטריצה ריבועית.

$p(\lambda) = |\lambda I_n - A|$ נקרא הפולינום האופייני של A.

<u>הערה:</u>

נשים לב שהפולינום האופייני של A הוא ממעלה n ושהשורשים של הפולינום האופייני הם בדיוק הערכים העצמיים של A. אנחנו יודעים שלפולינום ממעלה n יש לכל היותר n שורשים ולכן יש לכל היותר n ערכים עצמיים.

<u>שיטה למציאת ערכים עצמיים</u>

תהא A מטריצה ריבועית.

1) נחשב את הפולינום האופייני של A. (על ידי חישוב דטרמיננטה)
2) נמצא את השורשים של הפולינום האופייני.

<u>ריבוי אלגברי וריבוי גיאומטרי – הגדרה</u>

תהא A מטריצה ריבועית ויהא a ערך עצמי של A.

1) הריבוי האלגברי של a הוא החזקה של $(\lambda - a)$ בפולינום האופייני של A.
2) הריבוי הגיאומטרי של a הוא המימד של מרחב הפתרונות $(A - aI_n)\underline{x} = \underline{0}$.

<u>משפטים</u>

1) לכל מטריצה יש לכל היותר n וקטורים עצמיים בת"ל.
2) אם $\underline{v},\underline{u}$ הם וקטורים עצמיים של ערכים עצמיים שונים אז הם בת"ל.
3) הריבוי הגיאומטרי קטן שווה לריבוי האלגברי.

<u>עקבה של מטריצה – הגדרה</u>

תהא מטריצה A ריבועית.

העקבה של A תהיה סכום איברי האלכסון ונסמנה ב- $tr(A)$.

<u>משפט ויאטה</u>

תהא A מטריצה ריבועית אז סכום הערכים העצמיים שווה ל- $tr(A)$ ומכפלת הערכים העצמיים שווה ל- $|A|$.

לכסון מטריצה

הגדרה

תהיינה A, B מטריצות ריבועיות מאותו גודל.

נאמר ש- A דומה ל- B אם קיימת מטריצה הפיכה P כך ש- $A = P^{-1}BP$.

הגדרה

תהא A מטריצה ריבועית מגודל $n \times n$.

נאמר ש- A ניתנת ללכסון אם קיימת מטריצה אלכסונית D כך ש- A דומה ל- D.

משפט

תהא A מטריצה ריבועית.

A ניתנת ללכסון אם"ם הריבוי הגיאומטרי של כל ערך עצמי שווה לריבוי האלגברי שלו.

הערה

אם A ניתנת ללכסון אז באלכסון של D יש את הערכים העצמיים של A ובמטריצה P של הדמיון יש את הוקטורים העצמיים המתאימים.

תכונות של דמיון ולכסינות:

תהא A, B מטריצות ריבועיות דומות.

(1 $tr(A) = tr(B)$.
(2 $|A| = |B|$.
(3 גם A^n, B^n דומות.
(4 אם A ניתנת ללכסון אז גם B ניתנת ללכסון.
(5 אם A ניתנת ללכסון אז גם A^n ניתנת ללכסון לכל $n \in \mathbb{N}$ טבעי.
(6 כל מטריצה סימטרית ניתנת ללכסון.
(7 אם λ ערך עצמי של A עם וקטור עצמי $\underline{v}$ אז λ^n ערך עצמי של A^n עם וקטור עצמי $\underline{v}$.

תבניות ריבועיות וחקירת פונקציות

תבניות ריבועיות

הגדרה

תבנית ריבועית היא פונקציה מהצורה

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i,j} a_{i,j} x_i x_j$$

משפט

תהא $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ פונקציה.

f היא תבנית ריבועית אם"ם קיימת מטריצה A מגודל $n \times n$ סימטרית כך ש-

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \underline{x}^t A \underline{x}$$

הגדרות

תהא $f(\underline{x}) = \underline{x}^t A \underline{x}$ תבנית ריבועית.

1) f נקראת מוגדרת חיובית למחצה אם לכל $\underline{x} \neq 0$ מתקיים $f(\underline{x}) \geq 0$.
2) f נקראת מוגדרת חיובית לחלוטין אם לכל $\underline{x} \neq 0$ מתקיים $f(\underline{x}) > 0$.
3) f נקראת מוגדרת שלילית למחצה אם לכל $\underline{x} \neq 0$ מתקיים $f(\underline{x}) \leq 0$.
4) f נקראת מוגדרת שלילית לחלוטין אם לכל $\underline{x} \neq 0$ מתקיים $f(\underline{x}) < 0$.
5) f נקראת לא עקבית אם שאר ההגדרות לא מתקיימות.

הערה

נאמר שמטריצה סימטרית A היא מוגדרת חיובית/שלילית וכן הלאה בהתאם לתבנית הריבועית שהיא מגדירה.

הגדרה

תהא A מטריצה ריבועית מגודל $n \times n$.

קבוצת המינורים הראשיים של A הם הדטרמיננטות של המטריצות מהצורה

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & \dots & a_{m,m} \end{vmatrix}$$

כאשר $1 \le m \le n$.

משפטים

תהא $f(\underline{x}) = \underline{x}^t A \underline{x}$ תבנית ריבועית.

1) f מוגדרת חיובית למחצה אם"ם כל המינורים הראשיים של A גדולים או שווים ל- 0.
2) f מוגדרת חיובית לחלוטין אם"ם כל המינורים הראשיים של A גדולים ממש מ- 0.

הערה

נשים לב שאם f היא תבנית ריבועית.

1) f תבנית מוגדרת שלילית למחצה אם"ם $-f$ מוגדרת חיובית למחצה.
2) f תבנית מוגדרת שלילית לחלוטין אם"ם $-f$ מוגדרת חיובית לחלוטין.
3) f לא עקבית אם"ם f לא מוגדרת חיובית וגם $-f$ לא מוגדרת חיובית.

ולכן מספיק האפיון עבור המקרה של תבנית חיובית.

חקירת פונקציות בכמה משתנים

הפונקציות שנתעסק איתן הן תמיד לממשיים.

הגדרה

תהא $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ פונקציה בכמה משתנים.

הנגזרת החלקית ה- i של f היא לגזור את f לפי x_i כשמניחים ששאר המשתנים הם קבועים. נסמן את הנגזרת הזאת ב- f_i.

הערה

נשים לב שכל נגזרת חלקית כזאת היא גם בעצמה פונקציה של כמה משתנים ולכן גם אותן אפשר לגזור.

נסמן ב- $f_{i,j}$ את הנגזרת ה- j של f_i.

לדוגמה:

עבור הפונקציה $f(x,y)=x^2-y^2+3xy$ אז

$$f_{1,1}=2$$

$$f_{1,2}=3$$

נשים לב שאפשר לסדר את הנגזרות ה"שניות" האלו במטריצה

$$\begin{pmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} & \cdots & f_{1,n} \\ f_{2,1} & f_{2,2} & \cdots & f_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n,1} & f_{n,2} & \cdots & f_{n,n} \end{pmatrix}$$

שימו לב שזו מטריצה של פונקציות. אפשר לחשוב עליה כמטריצה שמציבים לכל הפונקציות את אותה הנקודה ואז נקבל מטריצה של מספרים כמו שאנחנו מכירים.

הגדרה

המטריצה הזאת נקראת מטריצת ההסיאן של f ונסמנה ב- H_f.

הערה

אנחנו נעבוד בקורס עם פונקציות שמקיימות שמטריצת ההסיאן סימטרית.

אז מעתה והלאה נניח תמיד שההסיאן סימטרית.

<u>תנאי לנקודת קיצון</u>

תהא $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ פונקציה ב- n משתנים.

הנקודה $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ היא חשודה לקיצון אם לכל נגזרת חלקית של f מתקיים

$$f_i(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$$

<u>הערה</u>

שימו לב שזה שכל הנגזרות החלקיות שוות ל-0 לא אומר שיש לנו נקודת מקסימום או מינימום.

קחו לדוגמה את $f(x) = x^3$ מתקיים ש- $f'(0) = 0$ אבל 0 אינה מינימום או מקסימום.

<u>בדיקת מינימום או מקסימום</u>

תהא $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ פונקציה בכמה משתנים.

תהא $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ נקודה כך שהיא חשודה לקיצון.

(1) $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ היא נקודת מינימום אם $H_f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ מוגדרת חיובית לחלוטין.
(2) $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ היא נקודת מקסימום אם $H_f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ מוגדרת שלילית לחלוטין.
(3) $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ היא נקודת אוכף אם $H_f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ לא עקבית.

<u>הערה</u>

נשים לב שכאשר אנחנו במשתנה יחיד אז התנאי הזה אומר ש- a היא נקודת מקסימום אם $f''(a) > 0$ ומינימום אם $f''(a) < 0$.